بسم الله الرحمن الرحيم:

محتوى المراجعة:

الاحتمالات:

- القانون العام لحساب احتمال حادثة
- خواص مهمة جدًا (مع تطبيقات)
- الاحتمال الشرطي (تطبيق)
- المتغير العشوائي والأمل الرياضياتي (تطبيق)
- طرق العد (قائمة، ترتيبة، توفيقة)
- دستور ثنائي الحد (تطبيق)
- ملخص هام جدًا عن استعمال القائمة، الترتيبة، التوفيقة في حل التمارين
- حل تطبيقات عن كل حالة بالتفصيل وهي الأكثر شيوعًا في البكالوريا.
- شجرة الاحتمالات
- السحب من صندوقين ونرد مع إنجاز تمرين شامل عن ذلك
- الحوادث المستقلة.

المتتاليات:

- كيفية برهان متتالية حسابية
- عبارة الحد العام لمتتالية حسابية
- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية
- إنجاز تمرين لمعالجة الأفكار حولها
- كيفية التعامل مع المجاميع
- الوسط الحسابي
- كيفية برهان متتالية هندسية.
- عبارة الحد العام لمتتالية هندسية.
- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية.
- إنجاز تمرين لمعالجة الأفكار حولها
- كيفية التعامل مع الجداءات.
- المتتالية الثابتة (برهان ومجموع).
- دراسة اتجاه تغير متتالية
- المتتاليتان المتجاورتان
- البرهان بالتراجع (أمثلة أكثر شيوعًا)

الأعداد المركبة:

- حل معادلات من الدرجة الثانية.
- الشكل الجبري لعدد مركب
- طويلة عدد مركب (تطبيق)
- الجذران التربيعيان (تطبيق)
- عمدة عدد مركب. (تطبيق)
- الشكل المثلثي والأسي لعدد مركب (تطبيق)
- دستور موافر (تطبيقات)
- النسبة وطبيعة المثلث
- المرجح، طبيعة الرباعي، مجموعة النقط

الدوال العددية:

- حالات عدم التعيين
- نتائج مهمة في النهايات
- المستقيمات المقاربة (تطبيقات)
- المنحنى المقارب.
- شفعية دالة (زوجية، فردية)
- محور تناظر، مركز تناظر
- الاستمرارية، مبرهنة القيم المتوسطة
- الحالة الخاصة والعامة وتفسيرها البياني
- الاشتقاقية وتفسيرها البياني
- المماس والأسئلة المتعلقة به.
- نقطة الانعطاف (الحالات الثلاثة).
- استنتاج رسم منحنى انطلاقًا من الآخر
- المناقشة البيانية (تطبيق)
- **الدالة الأسية**: خواص مهمة جدًا
- تطبيقات حول النهايات والمشتقة)
- اشارة عبارة أسية، التخلص من e^x.
- **الدالة اللوغاريتمية**. خواص مهمة جدًا
- حل المعادلات، تطبيقات حول النهايات
- إشارة عبارة لوغاريتمية.
- **الدوال الأصلية وحساب المساحات**
- ملخص هام جدًا للدوال الأصلية
- تطبيق هام حول حساب المساحات
- التكامل بالتجزئة (تطبيقات)
- القيمة المتوسطة لدالة
- الحجوم.
- المعادلات التفاضلية (تطبيقات)
- الأسئلة البيانية في الدوال.

القسمة في $\mathbb{Z}$ (رياضي وتقني)

- حلول معادلة $ax+by=c$
- تعيين الثنائيات الصحيحة (x, y)
- دراسة بواقي القسمة الإقليدية لعدد a^n على b
- إستنتاج باقي قسمة عدد على عدد
- حل جملة معادلتين في الأعداد الصحيحة
- برهان على أولية عدد طبيعي.
- إثبات أن $PGCD(x, y) = PGCD(a, b)$
- تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(x, y)$
- تعيين الثنائيات الطبيعية بحيث $PGCD(x, y) = d$

بسم الله الرحمن الرحيم:

الاحتمالات:

القانون العام لحساب إحتمال حادثة A:

$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$ مع $0 \leq P(A) \leq 1$

تطبيق: كيس به 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9 (كلها متماثلة)، نسحب كرة واحدة من الكيس، نعتبر الاحداث
A "نسحب كرة تحمل رقما زوجيا" B "تحمل رقما فرديا"
C "تحمل رقما أوليا"، D "تحمل رقم 11"
- أحسب $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$.

الحل: الارقام الزوجية: 0، 2، 4، 6، 8 ومنه: $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

الأرقام الفردية: 1، 3، 5، 7، 9 ومنه: $P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

الأرقام الأولية: 2، 3، 5، 7 ومنه: $P(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

لا يوجد كرة تحمل رقم 11 ومنه $P(D)=0$

خواص مهمة: $P(D)=0$: حادثة مستحيلة.

إذا كان $P(H)=1$: حادثة أكيدة.

$P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ حيث $\bar{A}=B$: حادثة عكسية.

$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$: $P(A\cap C)=\frac{1}{10}$

مثال: $P(A\cup C)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{5+4-1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

توضيح: $A\cap C$: تعني العناصر المشتركة بين المجموعة A والمجموعة C.
$A\cup C$: تعني العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و C.

الاحتمال الشرطي: حيث $P(A)\neq 0$: $P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}$

حيث $P_A(C)$ تقرأ: إحتمال الحادثة C علما أن A محققة.

مثال: تابع للتطبيق: $P_A(C)$: إحتمال سحب كرة تحمل رقما أوليا علما أنه زوجي:

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

المتغير العشوائي والامل الرياضياتي:

مثال: كيس به 4 كرات حمراء و 3 زرقاء و كرتين خضراوين ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين على التوالي بإرجاع تحمل لونا أحمرا
القيم الممكنة لـ X هي $X\in\{0,1,2\}$

الامل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

إذا كان $E(X)=0$ نقول اللعبة عادلة أما $E(X)>0$ مربحة

طرق العد:

① القائمة: n^p

② الترتيبة: $A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$ مع $n\geq p$

التوفيقة: $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ مع $n\geq p$.

مثال: $A_n^2=\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n(n-1)$

$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$

دستور ثنائي الحد:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(x+y)^2=C_2^0 x^{2-0} y^0 + C_2^1 x^{2-1} y^1 + C_2^2 x^{2-2} y^2 = x^2+2xy+y^2$$

ملخص هام جداً:

	قائمة	ترتيبة	توفيقة
تشكيل أعداد	يمكن تكرار الارقام	الارقام لا تكرر	
تشكيل لجان		المهام محددة (مدير، نائب)	المهام غير محددة
سحب من صندوق (كيس)	على التوالي بإرجاع	على التوالي دون إرجاع	في آن واحد

مثال 1: نريد تشكيل كلمة سر لهاتف نقال مكونة من 4 أرقام من بين الارقام 0، 1، 2، ......، 9
- عدد كلمات السر يمكن تشكيلها هي قائمة 10^4
- عدد كلمات السر المكونة من أرقام مختلفة مثنى مثنى هي ترتيبة $A_{10}^4=5040$

مثال 2: نريد تشكيل لجنة مكونة من شخصين من بين 3 رجال و 4 نساء.
أ) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها تضم مديراً ونائبا له هي $A_7^2=42$
ب) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها تضم شخصين هي $C_7^2=21$

مثال 3: كيس به 3 كرات حمراء و 4 زرقاء و 2 خضراء نسحب من الكيس عشوائيا 3 كرات، نعتبر الاحداث التالية
A "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"
B "الحصول على 3 كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى"
C "الحصول على كرة حمراء على الاقل"

بسم الله الرحمن الرحيم : الاحتمالات

مثال 3 : كيس به 3 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء و 5 كرات خضراء ، نسحب من الكيس عشوائيا 3 كرات ، نعتبر الأحداث

A = الحصول على 3 كرات من نفس اللون "

B = الحصول على 3 كرات من الوان مختلفة مثنى مثنى "

C = الحصول على كرة حمراء على الاقل "

D = الحصول على الكرة الأولى حمراء و الثانية زرقاء و الثالثة خضراء "

① حساب $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(D)$ في حالة السحب على التوالي :

Ⓟ بإرجاع ; قائمة : $12^3=1728$

$P(A)=\frac{3^3+4^3+5^3}{12^3}=\boxed{\frac{1}{8}}$ ، $P(B)=\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{3\times4\times5}{12^3}=\boxed{\frac{5}{24}}$

$P(C)=\frac{3[3^1\cdot9^2+3^2\cdot9^1]+3^3}{12^3}=\boxed{\frac{37}{64}}$ ، $P(D)=\frac{3\times4\times5}{12^3}=\boxed{\frac{5}{144}}$

ⓑ دون إرجاع : ترتيبة : $A_{12}^3=1320$

$P(A)=\frac{A_3^3+A_4^3+A_5^3}{A_{12}^3}=\frac{3}{44}$ ، $P(B)=\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{A_3^1A_4^1A_5^1}{A_{12}^3}=\frac{3}{11}$

$P(C)=\frac{3[A_3^1A_9^2+A_3^2A_9^1]+A_3^3}{A_{12}^3}=\frac{34}{55}$ ، $P(D)=\frac{A_3^1A_4^1A_5^1}{A_{12}^3}=\frac{1}{22}$

② حساب $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$ في حالة السحب في آن واحد

توفيقة : $C_{12}^3=220$

$P(A)=\frac{C_3^3+C_4^3+C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{3}{44}$ ، $P(B)=\frac{C_3^1C_4^1C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{3}{11}$

$P(C)=\frac{C_3^1C_9^2+C_3^2C_9^1+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{34}{55}$

$P(C)=1-\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{34}{55}$

شجرة الاحتمالات :

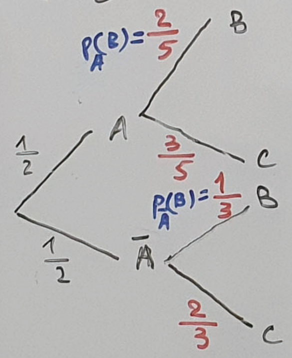
لدينا صندوقان U_1 و U_2 حيث يحتوي U_1 على 3 كرات سوداء و 2 بيضاء و يحتوي U_2 على كرة بيضاء و 2 سوداء ، نرمي زهر نرد مرقم من 1 إلى 6

- اذا كان الرقم المحصل عليه زوجي نسحب كرتين في آن واحد من U_1
- اذا كان الرقم المحصل عليه فردي نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع من U_2. نعتبر الاحداث التالية : A: الحصول على رقم زوجي

B = الحصول على كرتين من نفس اللون " C " الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

نشكل شجرة الاحتمالات وأحسب $P(B)$ و استنتج $P(C)$.

الحل :



$P_A(B)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P_{\bar{A}}(B)=\frac{A_2^2}{A_3^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

حساب $P(B)$ و استنتاج $P(C)$

$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=$

$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$\boxed{P(B)=\frac{11}{30}}$

$P(C)=1-P(B)=\boxed{\frac{19}{30}}$

هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

تكون A و B مستقلتان إذا كان : $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$ و $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{11}{30}=\frac{11}{60}$

ومنه $\frac{11}{60}\neq\frac{1}{5}$ أي $\boxed{\text{A و B غير مستقلتان .}}$

بسم الله الرحمن الرحيم : **المتتاليات**

① المتتالية الحسابية:

كيفية برهان أن المتتالية حسابية: من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}-U_n = r$ و $r\in\mathbb{R}$ وهو أساس المتتالية

عبارة الحد العام: $U_n = U_p+(n-p)r$ مع $n\geq p$

وإذا كان حدها الأول U_0 : $U_n = U_0+nr$

تطبيق: $U_0=-1$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$ مع $U_n\neq 2$ و $V_n=\frac{2}{1-U_n}$

البرهان أن (V_n) متتالية حسابية: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_{n+1}-V_n = \frac{2}{1-U_{n+1}}-\frac{2}{1-U_n}=\frac{2}{1-\frac{1}{2-U_n}}-\frac{2}{1-U_n}$$

$$=\frac{2(2-U_n)}{2-U_n-1}-\frac{2}{1-U_n}=\frac{4-2U_n-2}{1-U_n}=\frac{2(1-U_n)}{1-U_n}=2$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $V_0=\frac{2}{1-U_0}=1$

كتابة V_n بدلالة n : $V_n = 1+2n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

استنتاج U_n بدلالة n : $V_n=\frac{2}{1-U_n}$ ومنه $V_n(1-U_n)=2$ أي $V_n-V_nU_n=2$ أي $U_n=\frac{V_n-2}{V_n}$ أي $U_n=\frac{2n-1}{2n+1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية: $n>p$

$$S_n=U_p+U_{p+1}+\dots\dots+U_n=\frac{n-p+1}{2}[U_p+U_n]$$

تابع للتطبيق: $S_n=V_0+V_1+\dots\dots+V_n=\frac{n-0+1}{2}[V_0+V_n]=\frac{n+1}{2}[1+1+2n]$

حساب T_n : $T_n=U_0V_0+U_1V_1+\dots\dots+U_nV_n$

لدينا $V_n=\frac{2}{1-U_n}$ ومنه $V_n-V_nU_n=2$ أي $U_nV_n=V_n-2$

$T_n=V_0-2+V_1-2+\dots\dots+V_n-2=(V_0+V_1+\dots+V_n)\underbrace{-2-2\dots\dots-2}_{n+1\text{ مرة}}$ ← متتالية ثابتة

$$T_n=S_n-2(n+1)=\frac{n+1}{2}[2+2n]-2(n+1)$$

الوسط الحسابي: U_1 ، U_2 ، U_3 حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن $U_1+U_3=2U_2$

② المتتالية الهندسية:

كيفية برهان أن المتتالية هندسية: من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}=V_n\times q$ أو $\frac{V_{n+1}}{V_n}=q$ ، $q\in\mathbb{R}^*$ هو الأساس

عبارة الحد العام: $V_n=V_p\times q^{n-p}$ مع $n\geq p$

إذا كان حدها الأول V_0 : $V_n=V_0\times q^n$

إذا كان $-1<q<1$ مع $q\neq 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية: $n>p$

$$S_n=V_p+V_{p+1}+\dots\dots+V_n=V_p\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}=V_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

تطبيق: $U_0=\frac{13}{4}$ و $U_{n+1}=3+\sqrt{U_n-3}$ مع $U_n>3$ و $V_n=\ln(U_n-3)$

- تبيان أن (V_n) متتالية هندسية: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_{n+1}=\ln(U_{n+1}-3)=\ln[3+\sqrt{U_n-3}-3]=\ln[\sqrt{U_n-3}]$$

$$V_{n+1}=\ln(U_n-3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(U_n-3)=\frac{1}{2}V_n\Rightarrow V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=\ln[\frac{13}{4}-3]=\ln(\frac{1}{4})=-\ln 4$

V_n بدلالة n : $V_n=(-\ln 4)(\frac{1}{2})^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

استنتاج U_n بدلالة n : $V_n=\ln(U_n-3)$ ومنه $U_n-3=e^{V_n}$ أي $U_n=e^{V_n}+3$

$U_n=e^{(-\ln 4)(\frac{1}{2})^n}+3$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=e^0+3=4$$

حساب S_n : $S_n=V_0+V_1+\dots\dots+V_n=-\ln 4\,\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-2\ln 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

حساب P_n : $P_n=(U_0-3)(U_1-3)\dots\dots(U_n-3)=e^{V_0}\cdot e^{V_1}\dots\dots e^{V_n}$

$$P_n=e^{V_0+V_1+V_2+\dots\dots+V_n}=e^{S_n}=e^{-2\ln 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}e^{-2\ln 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}=e^{-2\ln 4}=e^{\ln\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}$$

الوسط الهندسي: V_0 ، V_1 ، V_2 حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن $V_0\times V_2=V_1^2$

③ المتتالية الثابتة:

كيفية برهان أن المتتالية ثابتة: من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}-U_n=0$

مجموع حدود متتالية ثابتة:

$$S=\underbrace{a+a+\dots\dots+a}_{n+1\text{ مرة}}=a(n+1)$$

④ اتجاه تغير متتالية:

من أجل كل عدد طبيعي n : (أ) $U_{n+1}-U_n\geq 0$: (U_n) متزايدة ، (ب) $U_{n+1}-U_n<0$: (تماما) متناقصة

⑤ المتتاليات المتجاورتان:

(U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان إذا وفقط إذا كانت احداهما متزايدة والأخرى متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n-V_n=0$

- كل متتاليتان متجاورتان تتقاربان لنفس النهاية.

⑥ البرهان بالتراجع:

نشرح ذلك بالمثال الأكثر شيوعا في الباك

$U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{4-U_n}{2+U_n}$ * برهن بالتراجع أن $0\leq U_n\leq 2$

الإجابة: نسمي $P(n)$ الخاصية "$0\leq U_n\leq 2$"

من أجل $n=0$ لدينا $0\leq U_0\leq 2$ أي $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $0\leq U_n\leq 2$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $(n+1)$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1}=-1+\frac{6}{2+U_n}$

$$\begin{array}{r|l} -U_n+4 & U_n+2 \\ +U_n+2 & -1 \\ \hline 0+6 & \end{array}$$

لدينا من الفرضية أن $0\leq U_n\leq 2$ أي $2\leq 2+U_n\leq 4$

أي $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2+U_n}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\frac{6}{4}\leq\frac{6}{2+U_n}\leq\frac{6}{2}$ ونضيف (-1)

أي $-1+\frac{3}{2}\leq -1+\frac{6}{2+U_n}\leq -1+3$ ، $0\leq\frac{1}{2}\leq U_{n+1}\leq 2$

أي $P(n+1)$ صحيحة، وأخيرا $0\leq U_n\leq 2$

بسم الله الرحمن الرحيم:

الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$-1 = i^2$$

حل المعادلات في $\mathbb{C}$:

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Delta = -4 = 4i^2$ ومنه

$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$: $z_2 = \sqrt{3} - i$

$S = \{\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i\}$

الشكل الجبري لعدد مركب:

$$z = x + yi$$

طويلة عدد مركب:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ و $|1-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

الجذران التربيعيان لعدد مركب:

$z = 8 + 6i$

نضع $z = w^2$ حيث $w = x + yi$ ومنه

$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ومنه $z = w^2$ يعني

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \\ |w^2| = |z| \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \rightarrow$ $2x^2 = 18$ أي $x^2 = 9$

$x_1 = 3$ | $y_1 = 1$

$x_2 = -3$ | $y_2 = -1$

ومنه الجذران التربيعيان للعدد z هما $3+i$ و $-3-i$

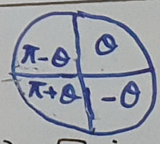
عمدة عدد مركب:

$arg(z) = \theta$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$ مثال $z = \sqrt{3} + i$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ أي $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

الشكل المثلثي والأسي لعدد مركب.



- الشكل المثلثي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- الشكل الأسي: $z = re^{i\theta}$

$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 1 - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)e^{i\pi}$ | $z = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

دستور موافر:

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z| = 1$ و $arg\, z = \frac{\pi}{4}$

$2025 = 4(506) + 1$

$z^{2025} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2025} = e^{i2025\frac{\pi}{4}}$

$z^{2025} = e^{i[4(506)+1]\frac{\pi}{4}} = e^{i[506\pi + \frac{\pi}{4}]}$

$z^{2025} = \cos(506\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(506\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

ومنه $z^{2025} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

تطبيق:

ليكن $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $z^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث z^n:

1. عدد حقيقي: نحل المعادلة $\frac{n\pi}{4} = k\pi$ أي $n = 4k$ ، $k \in \mathbb{N}$
2. حقيقي موجب: $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ أي $n = 8k$ ، $k \in \mathbb{N}$
3. حقيقي سالب: $\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi$ أي $n = 4 + 8k$ ، $k \in \mathbb{N}$
4. تخيلي صرف: $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي $n = 2 + 4k$ ، $k \in \mathbb{N}$

النسبة وطبيعة المثلث:

A ، B ، C نقط من المستوي المركب المنسوب إلى م.م.م.م $(O, \vec{u}, \vec{v})$ حيث

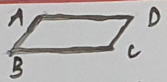
$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$|L| = \frac{AC}{AB}$ و $arg(L) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = \theta$

1. $\begin{cases} |L| = 1 \\ arg(L) = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين
2. $\begin{cases} |L| \neq 1 \\ arg(L) = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$ المثلث ABC قائم في A
3. $\begin{cases} |L| = 1 \\ arg(L) = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$ المثلث ABC متقايس الأضلاع.
4. $arg(L) = k\pi$ فإن النقط A ، B و C في استقامية.
5. إذا كانت $|z_A| = |z_B| = |z_C| = r$ فإن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r.

لاحقة المرجح G للجملة $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ هي $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ ولاحقة منتصف $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

طبيعة الرباعي $ABCD$:

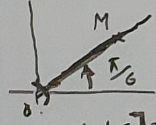


1. متوازي أضلاع $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$
   أو $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ (قطراه متناصفان)
2. مربع هو متوازي أضلاع مع $AB = AD$ و $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \pm\frac{\pi}{2}$
   أو قطراه متناصفان ومتقايسان ومتعامدان
3. المعين هو متوازي أضلاع مع $AB = AD$ و $(\vec{AB}, \vec{AD}) \neq \pm\frac{\pi}{2}$
   أو قطراه متناصفان متعامدان غير متقايسان.
4. المستطيل هو متوازي أضلاع $AB \neq AD$ و $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$
   أو قطراه متناصفان متقايسان غير متعامدان
5. شبه منحرف: $\vec{AB} = k\vec{DC}$ مع $k \neq 1$
   أو قطراه غير متناصفان $\frac{z_A + z_C}{2} \neq \frac{z_B + z_D}{2}$

مجموعة النقط:

A ، B ، C ، M نقط من المستوي

1. $|z - z_A| = 2$ أي $AM = 2$ (دائرة مركزها A و $r = 2$)
2. $|z| = AB$ أي $OM = AB$ (دائرة مركزها O و $r = AB$)
3. $|z - z_A| = |z - z_B|$ أي $AM = BM$ محور القطعة $[AB]$.
4. G مرجح الجملة $\{(A,1), (B,-1), (C,4)\}$ حيث:
   $\|\vec{AM} - \vec{BM} + 4\vec{CM}\| = 8$ أي $\|4\vec{GM}\| = 8$ أي $GM = 2$
   دائرة مركزها G و $r = 2$.
5. (6) $arg(z) = \frac{\pi}{6}$ أي $(\vec{u}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}$



مجموعة النقط هي نصف مستقيم $]OM)$ حامل بزاوية $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

بسم الله الرحمن الرحيم :

الدوال العددية، الأسية واللوغاريتمية.

حالات عدم التعيين

حالات عدم التعيين	$+\infty-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0(\infty)$	$\frac{0}{0}$

نتائج :	$\frac{\infty}{عدد}=\infty$	$\frac{عدد}{\infty}=0$	$\frac{1}{0}=\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$ $-\infty(+\infty)=-\infty$	$a-\infty=-\infty$ $a+\infty=+\infty$

المستقيمات المقاربة : (C_f) منحنى الدالة f

* $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=a$

مثل : $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-1}=+\infty$: (C_f) يقبل م.م. عمودي معادلته $x=1$

* $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقي معادلته $y=b$

مثل : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1}=2$: (C_f) يقبل م.م أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty$

* $\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$: (C_f) يقبل مستقيما م. مائلا معادلته $y=ax+b$

$\lim_{x\to+\infty} x+1+\frac{1}{x-1}-(x+1)=0$: (C_f) يقبل م.م. مائلا معادلته $y=x+1$ عند $+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$: (C_f) يقبل منحنى مقاربا (C_g) معادلته $y=g(x)$

مثل : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x^3=0$: (C_f) يقبل منحنى مقارب معادلته $y=x^3$ عند $-\infty$

شفعية دالة : f دالة معرفة على D_f، (C_f) تمثيلها البياني :

① $x\in D_f$، $-x\in D_f$، $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية و (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

② $x\in D_f$، $-x\in D_f$، $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية و (C_f) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم O.

محور التناظر لمنحنى : المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) إذا كان، $x\in D_f$، $2a-x\in D_f$: $f(2a-x)=f(x)$

مركز التناظر لمنحنى : النقطة $A(a,b)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا كان

$x\in D_f$، $(2a-x)\in D_f$: $f(2a-x)+f(x)=2b$

مثل : $f(-x)+f(x)=2$ فإن $A(0,1)$ مركز تناظر لـ (C_f).

الاستمرارية : نقول عن دالة f أنها مستمرة عند عدد x_0

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

مبرهنة القيم المتوسطة : ① المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

في مجال $]a,b[$ إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]a,b[$ و $f(a).f(b)<0$ أو $\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to b} f(x)<0$

والتفسير البياني لذلك هو (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α. حيث $a<\alpha<b$

② المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a,b[$ إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على $]a,b[$ و $k\in]f(a),f(b)[$

والتفسير البياني : (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $a<\alpha<b$

الاشتقاقية : نقول عن دالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0

إذا كان $\lim_{h\to 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المماس (T) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

إذا كان $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ نقول الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين و (C_f) يقبل نصف مماس معادلته $x=x_0$

أسئلة متعلقة بالمماس : ① البرهان أن (C_f) يقبل مماس (T)

يوازي مستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ ثم اكتب معادلة للمماس (T)

الجواب : نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ و معادلة (T) : $y=a(x-x_0)+f(x_0)$

② البرهان أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) معامل توجيهه a ثم اكتب معادلة له

- الجواب : نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ و معادلة المماس (T) هي :

$y=a(x-x_0)+f(x_0)$

③ البرهان أن (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(\alpha,\beta)$

الجواب : نحل المعادلة $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ نجد قيمة x_0

نقطة الانعطاف : نقول أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

$A(x_0,f(x_0))$ إذا كان : ① f'' تنعدم وتغير إشارتها.

② f' تنعدم ولا تغير إشارتها.

③ المماس (T) يخترق المنحنى (C_f).

مثال ←

x		x_0	
$f(x)-y$	+	0	−
الوضعية	فوق	(T) يخترق (C_f)	تحت

استنتاج رسم منحنى (C_h) انطلاقا من (C_f)

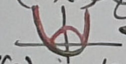
① $h(x)=f(x+a)+b$: (C_h) صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{u}\binom{-a}{b}$

② $h(x)=-f(x)$: (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

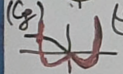
③ $h(x)=f(-x)$: (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب

④ $h(x)=-f(-x)$: (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمبدأ المعلم O.

⑤ $h(x)=|f(x)|$: (C_h) ينطبق على (C_f) في الجزء الواقع فوق (xx') والجزء السفلي يناظر بالنسبة لـ (xx')



⑥ $h(x)=f(|x|)$: الدالة h زوجية، (C_h) ينطبق على (C_f) في $[0,+\infty[$ ونناظر هذا الجزء بالنسبة لـ (yy').



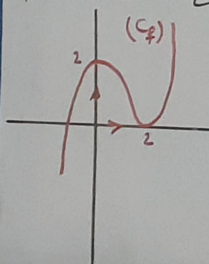
المناقشة البيانية : من الأسئلة الأكثر شيوعا في الباك

هناك 3 حالات للمناقشة البيانية

* أفقية : $f(x)=h(m)$ مثل $f(x)=m$ و $f(x)=m^2+1$
* مائلة : $f(x)=ax+h(m)$ مثل $f(x)=x+m$ و $f(x)=2x+|m|$
* دورانية $f(x)=h(m)x+b$ مثل $f(x)=mx$ و $f(x)=mx-m$

ملاحظة : المناقشة المائلة لها علاقة مع المماس أو المستقيم المقارب المائل.

تطبيق : ناقش بيانيا، عدد حلول المعادلة $f(x)=\sqrt{m}$ مع $m\geq 0$.



① $\sqrt{m}<0$ مستحيل

② $\sqrt{m}=0$ ومنه $m=0$ (حلان)

③ $0<\sqrt{m}<2$ أي $0<m<4$ (3 حلول)

④ $\sqrt{m}=2$ أي $m=4$ (حلان)

⑤ $\sqrt{m}>2$ أي $m>4$ (حلا وحيدا).

بسم الله الرحمن الرحيم:

الدالة الأسية: خواص مهمة جدًا.

$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$	$e^{1-x}=\frac{1}{e^{x-1}}$	$e^{-x}>0$	$\frac{1}{e^x}=e^{-x}$	$e^a \cdot e^b=e^{a+b}$	$e \simeq 2,72$
$e^{\ln a}=a$		$e^x>0$	$(e^x)^n=e^{nx}$	$\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$	$e^0=1$

المشتقة				
$(e^f)'=f'e^f$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$	$\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0$	$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$	$e^{-\infty}=0$
	$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	$e^{+\infty}=+\infty$

تطبيق: * $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=\frac{e^{-x}}{e^0+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

* $\lim_{x\to+\infty}x^2-e^x=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{e^x}{x^2}\right]=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x^2-e^x=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=-1$

* $f(x)=(2x+1)e^{1-x}$ ومنه $f'(x)=2e^{1-x}-e^{1-x}(2x+1)=(-2x+1)e^{1-x}$

إشارة عبارة أسية: إذا $\alpha e^{ax}+\beta$ تنعدم عند x_0 فإن إشارتها تعين كما يلي

x	$x_0=0$	
$\alpha e^{ax}+\beta$	عكس إشارة αa	إشارة αa
$-e^{-x}+1$	$-$	$+$

التخلص من e^α: $g(x)=2-xe^x$ و $g(\alpha)=0$ و $f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}$

اثبات أن: $f(\alpha)=\alpha$: لدينا $g(\alpha)=2-\alpha e^\alpha=0$ أي $e^\alpha=\frac{2}{\alpha}$

$\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}=2\alpha+2\left(\frac{\alpha}{2\alpha+2}\right)=\alpha=f(\alpha)$

الدالة اللوغاريتمية: خواص مهمة جدًا. $a>0$ و $b>0$

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$ $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$	$\ln a^n=n\ln a$ $\ln e^a=a$	$\ln a+\ln b=\ln(a\cdot b)$ $\ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$	$\ln 1=0$ $\ln e=1$

المشتقة				
	$\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$	$\ln 0^+=-\infty$	$\ln x^2=2\ln\|x\|$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
	$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$	$\ln+\infty=+\infty$		
$(\ln f)'=\frac{f'}{f}$	$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$	$\lim_{x\to0}x^n\ln x=0^-$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$	

تطبيق: حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة: $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$

نضع $t=\ln x$ نجد $t^2-3t+2=0$ أي $\Delta=1$ ومنه

$t_1=1$ و $t=2$ ومنه $\ln x=1$ أي $x=e$ و $\ln x=2$

ومنه $x=e^2$ $S=\{e,e^2\}$

* $\lim_{x\to0}x^2-x\ln x=0$ و $\lim_{x\to+\infty}x^2-x\ln x=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to1}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{t\to0}t\ln t=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

* $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x^2}$ و $f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}$

إشارة عبارة لوغاريتمية: نعين إشارة العبارة $1-\ln(1-x)$

نعين مجموعة التعريف أولا: $D=]-\infty,1[$. إذا كان $1-\ln(1-x)=0$

ومنه $\ln(1-x)=1$ أي $1-x=e$ أي $x=1-e$

x	$-\infty$	$1-e$	1
$1-\ln(1-x)$	$-$	0	$+$

الدوال الأصلية: نقول أن الدالة H دالة أصلية للدالة f إذا كانت H قابلة للاشتقاق على المجال I حيث $H'(x)=f(x)$

مثال: $f(x)=\ln(x-1)$ و $D_f=]1,+\infty[$ ، $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-x$

التبيان أن H دالة أصلية لـ f على $]1,+\infty[$: الجواب: H قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$: $H'(x)=1\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}(x-1)-1=f(x)$

ومنه H دالة أصلية لـ f

$f(x)$		$H(x)$	
ax^n	$3x^4+x+1$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+x$
$(n\geq2)$ $\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\frac{-1}{x-1}$
$u'u^n$	$\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\frac{(\ln x)^2}{2}$
$\frac{u'}{u}$	$\frac{1}{x+1}$	$\ln(u)$	$\ln(x+1)$
e^{ax+b}	e^{2x+1}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\frac{1}{2}e^{2x+1}$

التكاملات وحساب المساحات: $b>a$

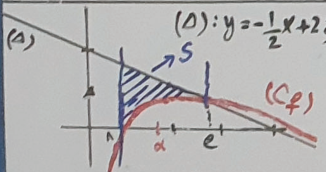
H دالة أصلية لـ f: $I=\int_a^b f(x)dx=[H(x)]_a^b=H(b)-H(a)$

التفسير الهندسي للعدد I: هو مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=a$ و $x=b$ (وحدة المساحة $(u.a)$)

مثال: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$ و $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x+2$

وحدة الطول $(2cm)$

حساب المساحة S



$S=\int_1^e[y-f(x)]dx$

$S=\int_1^e\left[-\frac{1}{2}x+2-(-\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x})\right]dx=\int_1^e\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}dx$

$S=\left[\ln x-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\left[\ln e-\frac{(\ln e)^2}{2}-0\right]$

$S=1-\frac{1}{2}(4cm^2) \Rightarrow S=2cm^2$

التكامل بالتجزئة: $\int_a^b uv'dx=[u.v]_a^b-\int_a^b u'vdx$

مثال: $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

$u(x)$	x	$u'(x)$	1
$v(x)$	$-e^{-x}$	$v'(x)$	e^{-x}

$I=[-xe^{-x}]_0^1-\int_0^1-e^{-x}dx$

$I=-e^{-1}-0+[-e^{-x}]_0^1$

$I=1-2e^{-1}$

$J=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

$u(x)$	$\ln x$	$u'(x)$	$\frac{1}{x}$
$v(x)$	$-\frac{1}{x}$	$v'(x)$	$\frac{1}{x^2}$

$J=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{x^2}dx$

$J=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$J=-\frac{\ln e}{e}+0+\left[-\frac{1}{e}+1\right]$

$J=1-\frac{2}{e}$

القيمة المتوسطة لدالة f

$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خواص مهمة:

إذا $m\leq f(x)\leq M$ فإن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

الحجوم: $V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx$

وحدة الحجم $(u.v)$ مثل (cm^3).

بسم الله الرحمن الرحيم :

المعادلات التفاضلية :

F دالة أصلية للدالة f و G دالة أصلية الدالة F

d و c، b، a أعداد حقيقية : $f(x)=y$ و $f'(x)=y'$

المعادلة التفاضلية		الحل العام للمعادلة	
$y'=ay$	$y'=2y$	$y=Ce^{ax}$	$y=Ce^{2x}$
$y'=ay+b$	$y'=-y+2$	$y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$	$y=Ce^{-x}+2$
$y'=f(x)$	$y'=\frac{1}{x-1}$	$y=F(x)+c$	$y=\ln(x-1)+c$
$y''=f(x)$	$y''=\frac{1}{x^2}$	$y=G(x)+cF(x)+d$ $y=-\ln\lvert x\rvert-\frac{c}{x}+d$	

برهان أن دالة h حلا للمعادلة التفاضلية $y'+3y=\frac{9}{2}e^{-2x} \dots (E)$ حيث $h(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}$

تكون h حلا للمعادلة (E) إذا كان $h'+3h=\frac{9}{2}e^{-2x}$

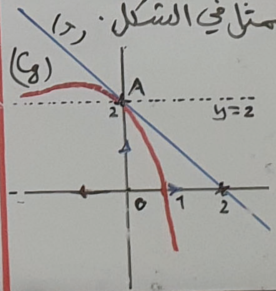
لدينا $h'(x)=-9e^{-2x}$

ومنه $h'+3h=-9e^{-2x}+3\left(\frac{9}{2}\right)e^{-2x}=\frac{9}{2}e^{-2x}$

أي h حلا للمعادلة التفاضلية (E).

إيجاد عبارة دالة إنطلاقا من منحنى : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$

ب : $g(x)=a+b\times e^{x}$، (C_g) تمثيلها الممثل في الشكل :



(T) مماس لـ (C_g) في النقطة A.

- عين من البيان : $g(0)$، $g'(0)$
- أكتب معادلة للمماس (T)
- عين الأعداد الحقيقية a و b :

الحل : $g(0)=2$ ، $g'(0)=\frac{0-2}{2-0}=-1$

معادلة (T) : $y=g'(0)(x-0)+g(0)$

$y=-1(x-0)+2$

$(T): \boxed{y=-x+2}$

- تعيين الأعداد a و b :

لدينا $g(0)=2$ ومعناه $a+b(0)e^{0}=2$ أي $\boxed{a=2}$

ولدينا $g'(x)=be^{x}+e^{x}bx$ أي $g'(x)=(bx+b)e^{x}$

ومنه $g'(0)=-1$ أي $(b(0)+b)e^{0}=-1$ أي $\boxed{b=-1}$

ومنه $\boxed{g(x)=2-xe^{x}}$

بسم الله الرحمن الرحيم: (رياضي وتقني)

الأعداد والحساب (القسمة في ℤ)

نعتبر المعادلة (E) .... $17x-4y=29$ و x، y عددان صحيحان

- البرهان أن المعادلة (E) تقبل حلولا: بما أن $PGCD(17,4)=1$ و 1 قاسم لـ 29 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا.

- البرهان أنه اذا كانت (x,y) حلا لـ (E) فان $x\equiv 1[4]$

(x,y) حلا لـ (E) معناه $17x-4y=29$ ومنه $17x=29+4y$ أي $17x\equiv 29[4]$ ومنه $16x+x\equiv 28+1[4]$

أي $\boxed{x\equiv 1[4]}$ لأن $16x\equiv 0[4]$ و $28\equiv 0[4]$

حلول المعادلة (E): $x\equiv 1[4]$ أي $x=4k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

نعوض قيمة x في (E) نجد $17(4k+1)-4y=29$ أي $y=17k-3$

$$S=\{(x,y)=(4k+1,17k-3),k\in\mathbb{Z}\}$$

- تعيين الثنائيات الصحيحة $(x.y)$ التي تحقق: $xy<279$

لدينا $x=4k+1$ و $y=17k-3$ ومنه نعوض في $xy<279$

$(4k+1)(17k-3)<279$ نجد $28k^2-5k-282<0$

$\sqrt{\Delta}=277$ أي $k_1=-2,07$ و $k_2=2$

k	$-\infty$		$-2{,}07$		2		$+\infty$
$28k^2-5k-282$		+	0	−	0	+	

أي $k\in\{-2,-1,0,1\}$

بعد التعويض بقيم k في x و y نجد الثنائيات

$$(x,y)\in\{(-7,-37),(-3,-20),(1,-3),(5,14)\}$$

① دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7:

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

بواقي القسمة هي 1، 5، 4، 6، 2، 3 للعدد 5^n على 7.

- استنتاج باقي القسمة للعدد $2029^{1446}-2028^{2025}$ على 7.

$2029\equiv 6[7]$ ومنه $2029\equiv 6-7[7]$ أي $2029\equiv -1[7]$

$2029^{1446}\equiv(-1)^{1446}[7]$ أي $2029^{1446}\equiv 1[7]$

$2028\equiv 5[7]$ ومنه $2028^{2025}\equiv 5^{2025}[7]$ لكن $2025=6(337)+3$

من الشكل $\boxed{6k+3}$ من الجدول نجد $2028^{2025}\equiv 6[7]$

$$\left\{\begin{array}{l}2029^{1446}-2028^{2025}\equiv 1-6[7]\\ 2029^{1446}-2028^{2025}\equiv 2[7]\end{array}\right.$$ الباقي هو $\boxed{2}$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة: $\left\{\begin{array}{l}n-5^n\equiv 2025[7]\\ n\equiv 1446[6]\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}n-5^n\equiv 2[7]\\ n\equiv 0[6]\end{array}\right.\Leftarrow \left\{\begin{array}{l}n-5^n\equiv 2[7]\\ n=6\alpha\end{array}\right.$ $\alpha\in\mathbb{N}$ ، $6\alpha-5^{6\alpha}\equiv 2[7]$

من الجدول لدينا $5^{6\alpha}\equiv 1[7]$ أي $6\alpha-1\equiv 2[7]$ أي $6\alpha\equiv 3[7]$

ومنه $2\alpha\equiv 1[7]$ أي $8\alpha\equiv 4[7]$ أي $\alpha\equiv 4[7]$ أي $\boxed{\alpha=7\beta+4}$

ومنه قيم n: $\boxed{n=6[7\beta+4]=42\beta+24}$ مع $\beta\in\mathbb{N}$

- دراسة أولية العدد 127: أولا $\sqrt{127}\simeq 11,26$

نقسم 127 على الأعداد الأولية الأصغر من 11,26 أي 2، 3، 5، 7، 11 نجد أنه لا يقبل القسمة عليها ومنه العدد 127 عددا أوليا.

- حل المعادلة (E) .... $5x-4y=12$ حيث x و y عددان صحيحان:

نلاحظ أن الثنائية $(4,2)$ حلا للمعادلة (E) ومنه

$\left\{\begin{array}{l}5x-4y=12\\ 5(4)-4(2)=12\end{array}\right.$ بالطرح نجد $5(x-4)-4(y-2)=0$ أي

$5(x-4)=4(y-2)$ و $4\mid 5(x-4)$ مع 4 أولي مع 5 وحسب غوص فإن $4\mid x-4$

أي $x-4=4k$ و $\boxed{x=4k+4}$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و $\boxed{y=5k+2}$

- التبيان أن $PGCD(x,y)=PGCD(k-2,12)$: (برهان مهم جدا!)

نضع $PGCD(x,y)=d$ و $PGCD(k-2,12)=d'$

① $PGCD(x,y)=d$ معناه $d\mid x$ و $d\mid y$ أي $d\mid 5x-4y$ أي $d\mid 12$ و $d\mid x$ و $d\mid y$ فان $d\mid y-x$ أي $d\mid 5k+2-4k-4$

أي $d\mid k-2$ أي d قاسم لـ x، y، 12 و $k-2$.

② $PGCD(k-2,12)=d'$ فان $d'\mid k-2$ و $d'\mid 12$ أي $d'\mid 4(k-2)+12$ أي $d'\mid 4k+4$ أي $d'\mid x$ و $d'\mid k-2$ و $d'\mid 12$ فان $d'\mid 5(k-2)+12$ أي $d'\mid 5k+2$

أي $d'\mid y$ ومنه d' القاسم لـ 12، $k-2$، x و y ومن ① و ②

نجد $\boxed{d'=d}$ أي $\boxed{PGCD(x,y)=PGCD(k-2,12)}$

- القيم الممكنة لـ $PGCD(x,y)$: $d\mid x$ و $d\mid y$ فان $d\mid 5x-4y$ أي $d\mid 12$ ومنه $d\in\{1,2,3,4,6,12\}$

- تعيين الثنائيات (x,y) بحيث $PGCD(x,y)=4$:

$PGCD(x,y)=PGCD(k-2,12)=4$ (من الجواب السابق)

نضع $\boxed{k-2=4\lambda}$ مع $\lambda\in\mathbb{N}$ أي $PGCD(4\lambda,12)=4$

أي $4\,PGCD(\lambda,3)=4$ أي $PGCD(\lambda,3)=1$

ومنه $\lambda=3p+1$ أو $\lambda=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$

أ) $k-2=4(3p+1)$ أي $\boxed{k=12p+6}$ أي $\boxed{x=48p+28}$ و $y=60p+32$

ب) $k-2=4(3p+2)$ أي $k=12p+10$ أي $\boxed{x=48p+44}$ و $y=60p+52$

$$(x,y)=\{(48p+28,60p+32),(48p+44,60p+52)\}$$

إن شاء الله 20/20